## 6. Exercices d'entraînement et de préparation au DS

**Méthode** Ces exercices doivent être faits au fur et à mesure de l'avancement du chapitre (le "moment idéal" pour les faire est indiqué dans la page d'exercices "faits en classe").
Ils seront faits dans un cahier séparé, appelé "Cahier de préparation", qui sera vérifié à chaque DS.
Les corrigés de ces exercices sont disponibles en ligne sur sur le site **http ://maths.langella.free.fr/** , rubrique Espace lycéen / Terminale Spécialité / Exercices.
Si en les faisant, vous vous rendez compte que vous n'avez pas bien compris quelque chose, il faut me poser des questions à ce sujet, soit en classe, soit par mail : **maths.langella@gmail.com**.

**Exercice 1.A** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n$ par $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.

**Exercice 1.B**

1. Soient deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{1; 2; 3; 4\}$.
   Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ puis de $E \times F$.
2. Un restaurant propose un menu "plat + dessert".
   Un client qui décide de prendre ce menu doit choisir un plat parmi les trois viandes et les deux poissons proposés, puis un dessert parmi les quatre desserts proposés. déterminer le nombre de choix différents permettant de construire son menu.

**Exercice 1.C**

1. Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple (0,6) que l'on complète par un 8-uplet (octuplet) de $E = \{0; 1; 2...; 9\}$.
   (a) Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.
   (b) Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles ?
2. Pour sécuriser son compte sur un site internet, Emma doit créer un mot de passe composé de 7 lettres, uniquement avec les 26 lettres de l'alphabet (pas de caractère spécial, pas de chiffre, pas de différence entre les majuscules et les minuscules). Sa copine Fanny lui demande : "Combien de mots de passe différents peux-tu créer ?"
   Quelle sera la réponse d'Emma ?

**Exercice 1.D**

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Combien y a-t-il de 3-uplets (triplets) d'éléments distincts de $E$ ?
2. Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé Top 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat.
   (a) Combien de classements composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?
   (b) Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière. Combien de classements composés des sic premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

**Exercice 1.E**

1. Soit $E = \{0; 1; 2...; 9\}$. Combien de permutations de $E$ peut-on réaliser ?
2. On reprend la question 2 de l'exercice précédent.
   (a) Combien de classements des 14 équipes de la première phase du Top 14 sont possibles ?
   (b) Lors de la saison 2018-2019, le Stade Toulousain a fini premier de la phase régulière, suivi de Clermont-Ferrand.
   Combien de classements de ce championnat sont alors possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement première et deuxième ?

**Exercice 1.F**

1. Calculer "à la main" $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$
2. Calculer $\binom{7}{k}$ pour tout entier $k \in [\![0; 5]\!]$
3. Calculer $\binom{20}{12}$ avec votre calculatrice.
   Dans les consignes suivantes, remplacer $n$ et $k$ par leurs valeurs respectives :
   **Casio** : $n$ OPTN F6 F3 F $k$
   **Numworks** : touche "paste", choisir "dénombrement", puis choisir "binomial(n,k)", EXE, et on saisit les deux nombres $n$ et $k$
   **TI-83** : $n$, touche "math", choisir le mode "prob", puis le mode 3 :Combinaison, et taper la valeur de $k$

**Exercice 1.G** 1. On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différents. Une "main" de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.

   (a) Combine de "mains" de 4 cartes peut-on former ?

   (b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?

2. Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki (football à 5).

   (a) Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?

   (b) Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité qu'Hugo et Kylian soient ensemble ? En donner l'arrondi à 0,01 près.

**Exercice 1.H** Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, les combinaisons suivantes : $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$ et $\binom{6}{4}$.

**Exercice 1.I** Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble $E = \{A, B, O\}$ (ces éléments sont appelés allèles).

1. Combien de couples d'allèles sont possibles ?
2. On appelle *hétérozygote* un gène qui est représenté par deux allèles différents. L'ordre ne compte pas (par exemple, le couple d'allèles (A,B) donne le même code que le couple d'allèles (B,A)).
   Déterminer le nombre d'hétérozygotes possibles pour le groupe sanguin.
3. On appelle *homozygote* un gène qui contient les mêmes allèles.
   on appelle *génotype* l'ensemble des compositions alléliques d'un individu.
   Déterminer le nombre de génotypes sanguins.

**Exercice 1.J** Un *escape game* (jeu en immersion dans lequel les participant résolvent des énigmes pour sortir d'une pièce), il faut trouver un code à 4 chiffres contenant une fois le nombre 3, deux fois le nombre 5 et une fois le nombre 6.
Déterminer le nombre de codes différents possibles, puis la probabilité de trouver le bon code dès le premier essai. Arrondir à 0,01.

## 7. Corrigés des exercices d'entraînement et de préparation au DS

### Exercice 1.A :

Pour tout entier naturel $n$, on note $P(n)$ : « $u_n = 2 \times 3^n + 1$ ».

**Initialisation**

$u_0 = 3$ et $2 \times 3^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$. Donc $u_0 = 2 \times 3^0 + 1$.

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

**Hérédité**

Hypothèse de récurrence : soit un entier naturel $p$ tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_p = 2 \times 3^p + 1$.

On montre que $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{p+1} = 2 \times 3^{p+1} + 1$.

$u_{p+1} = 3u_p - 2$ et $u_p = 2 \times 3^p + 1$, donc $u_{p+1} = 3 \times (2 \times 3^p + 1) - 2$, soit $u_{p+1} = 3 \times 2 \times 3^p + 3 - 2$.

Puisque $3 \times 3^p = 3^{p+1}$, on en déduit : $u_{p+1} = 2 \times 3^{p+1} + 1$.

Donc $P(p+1)$ est vraie.

**Conclusion**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$, c'est-à-dire que $u_n = 2 \times 3^n + 1$ pour tout entier naturel $n$.

### Exercice 1.B :

**1** L'ensemble E est composé de 2 éléments, et l'ensemble F de 4 éléments. De plus, ces deux ensembles sont disjoints.
Donc par le principe additif, le nombre d'éléments de E ∪ F est 2 + 4, soit 6.
Par le principe multiplicatif, le nombre d'éléments du produit cartésien E × F est 2 × 4, c'est-à-dire 8.

**2** L'ensemble des viandes et celui des poissons étant disjoints, le nombre de plats différents est 3 + 2, soit 5 (d'après le principe additif).
Le choix d'un menu est un couple du produit cartésien P × D, où P est l'ensemble des plats et D l'ensemble des desserts (un client choisit un plat et un dessert).
Il y a 5 plats et 4 desserts.
Ainsi, d'après le principe multiplicatif, il y a 5 × 4, soit 20 manières différentes de composer son menu.

### Exercice 1.C :

**1** **a.** Le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06 est donc égal au nombre de 8-uplets de E = {0, 1, 2, …, 9}.
Cet ensemble E est composé de 10 éléments, donc le nombre de 8-uplets de E est égal à $10^8$.
Donc il y a $10^8$ numéros de téléphone commençant par 06.
**b.** Il y a autant de numéros de téléphone possibles commençant par 07 que de numéros possibles commençant par 06, soit $10^8$. Par le principe additif, il y a donc $10^8 + 10^8$, soit $2 \times 10^8$ numéros de téléphone commençant par 06 ou 07.

**2** Un mot de passe de ce site internet peut être considéré comme un 7-uplet de l'ensemble F composé des lettres de l'alphabet. Un mot de passe n'ayant pas nécessairement de sens, il y a donc $26^7$ mots de passe différents.
Ainsi, Emma peut répondre à Fanny qu'il y a 8 031 810 176 mots de passe différents.

## Exercice 1.D :

1. L'ensemble E est composé de 5 éléments ($n = 5$).
Le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est donc égal à $5 \times 4 \times 3$, soit 60.

2. **a.** Pour déterminer le nombre de classements des 6 premières équipes possibles, il suffit de déterminer le nombre de 6-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 14 éléments. Puisque $14 - (6 - 1) = 9$, il y en a $14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$, soit 2 162 160.

**b.** Le premier du classement est fixé : le Stade Toulousain.
On complète alors le classement des 6 premières équipes avec 5 équipes parmi les 13 restantes.
Puisque $13 - (5 - 1) = 9$, il y a alors $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$, soit 154 440 classements possibles avec le Stade Toulousain premier.

## Exercice 1.E :

1. L'ensemble E est composé de 10 éléments.
Donc le nombre de permutations de E est $10!$, soit 3 628 800.

2. **a.** Un classement de la première phase du TOP 14 est une permutation de l'ensemble des 14 équipes qui composent ce championnat. Or, il y a $14!$ permutations possibles. Il y a donc $14!$, soit 87 178 291 200, classements différents pour la phase régulière du TOP 14.

**b.** Les deux premières places sont fixées.
Ainsi, pour construire un classement, il reste à classer les 12 équipes restantes, de la 3$^{e}$ à la 14$^{e}$ place. Ainsi, cela revient à réaliser une permutation d'un ensemble à 12 éléments.
Or, il y a $12!$ permutations possibles, donc il y a 479 001 600 classements différents de la phase régulière du TOP 14 avec le Stade Toulousain premier et Clermont-Ferrand deuxième.

## Exercice 1.F :

1. $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35.$

De plus, $\binom{7}{4} = \binom{7}{7-3} = \binom{7}{3}$ par la propriété de symétrie. Donc $\binom{7}{4} = 35$.

2. $\binom{5}{0} = 1$ et $\binom{5}{1} = 5$. De plus, $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$ Par la propriété de symétrie, on obtient $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{5} = \binom{5}{0} = 1.$

3. Avec une calculatrice, on obtient $\binom{20}{12} = 125\ 970.$

## Exercice 1.G :

**1** **a.** Une « main » de 4 cartes est une combinaison de 4 éléments de l'ensemble E composé des 32 cartes du paquet. Or, le nombre de combinaisons de 4 cartes de E est $\binom{32}{4}$, soit : $\frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4\,!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2} = 35\ 960.$

Il y a donc 35 960 mains de 4 cartes.

**b.** On tire 4 cartes au hasard, donc les mains sont équiprobables.

Parmi les 35 960 mains de 4 cartes, une seule est composée des 4 as.

Ainsi, la probabilité d'avoir les 4 as est $\frac{1}{35\ 960}$, soit environ 0,000 03.

**2** **a.** Dénombrer les équipes de 5 joueurs qui contiennent Hugo et Kylian revient à dénombrer les équipes de 3 joueurs qu'on peut former à partir d'un ensemble à 8 joueurs (les 10 joueurs auxquels on enlève Hugo et Kylian). Or, les équipes de 3 joueurs choisis parmi 8 sont au nombre de $\binom{8}{3}$, soit : $\frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 8 \times 7 = 56.$

Il y a donc 56 équipes différentes de 5 joueurs contenant Hugo et Kylian.

**b.** Le nombre d'équipes différentes de 5 joueurs qu'on peut former à partir des 10 amis est $\binom{10}{5}$, c'est-à-dire $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$, soit 252. Les équipes étant réalisées au hasard, leurs différences sont équiprobables. D'après la question précédente, 56 équipes peuvent contenir Hugo et Kylian. Donc la probabilité qu'une équipe contienne ces deux joueurs est $\frac{56}{252}$, soit $\frac{2}{9}$, soit environ 0,22.

## Exercice 1.H :

On construit le triangle de Pascal jusqu'à sa septième ligne, sur laquelle se trouvent les coefficients de la forme $\binom{6}{k}$, où $k$ est un entier entre 0 et 6.

On en déduit : $\binom{6}{2} = 15$ ; $\binom{6}{3} = 20$ et $\binom{6}{4} = 15.$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

## Exercice 1.I :

**a.** Il y a 3 allèles différents, donc le nombre de couples d'allèles est $3^2$, soit 9.

**b.** Un hétérozygote est une combinaison de 2 éléments de E. Ainsi, le nombre d'hétérozygotes est $\binom{3}{2}$, soit $\frac{3 \times 2}{2}$ donc 3. Il y a donc 3 hétérozygotes différents.

Ce sont {A, B}, {A, O} et {B, O}.

**c.** Les génotypes sont constitués des homozygotes et des hétérozygotes. Il y a 3 homozygotes ({A, A}, {B, B} et {O, O}) et 3 hétérozygotes.

Par le principe additif, il y a donc 6 génotypes différentes.

## Exercice 1.J :

Pour déterminer le nombre de codes différents, on peut utiliser un arbre de choix comme ci-contre.

On dénombre alors 12 codes différents.

La probabilité de trouver le bon code dès le premier essai est donc $\frac{1}{12}$, soit environ 0,08.